Малая академия Наук Республики Саха (Якутия)

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА СУММУ АЛИКВОТНЫХ ДРОБЕЙ

Николаева Сайаана Александровна

МБОУ «Вилюйская гимназия им.И.Л.Кондакова»

Актуальность исследования

Актуальность данного исследования заключается в том, что в жизни часто встречаются дроби при равном дележе, и представление дроби в виде суммы более мелких дробей всегда пригодится.

Цель: выделить удобную формулу для разложения правильной несократимой дроби в виде суммы двух или более аликвотных дробей.

Задачи:
- исследовать правильные несократимые дроби с числителями 2 и 3;
- сделать предварительные выводы из эксперимента и вывести формулу для быстрого разложения дроби на сумму аликвотных дробей;
- доказать существенность полученной формулы.

Методы исследования:

Аналитический - путем сравнения, обобщения полученных результатов, математический аппарат—метод индукции.

Гипотеза: возможно представить всякую дробь в виде суммы аликвотных дробей.

Объект исследования: правильные несократимые дроби

Предмет исследования: суммы аликвотных дробей

Египетские дроби

Среди множества дробей мы рассмотрим египетские дроби, или же как их называют по-другому – аликвотные (дроби с числителем 1).

В древнеегипетском источнике — папирусе Ринда — мы находим таблицу разложений в суммы различных аликвотных дробей для чисел вида $\frac{2}{n}$. Для этого воспользовались тождеством: $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$

Применяя это тождество, раскладывают данную аликвотную дробь в сумму других аликвотных дробей, но уже с большими знаменателями. Тем самым избегают повторяющихся дробей в разложении. Например, упомянутая ранее задача из папируса Ринда в общем виде решается так:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

Разложение дробей вида 2/n

обыкновенную правильную несократимую дробь можно разложить на сумму аликвотных, например возьмем дробь $\frac{2}{7}$ и разложим её.

$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

Разложили несколько дробей.

$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$

У этих дробей есть закономерность, что, если увеличить знаменатель дроби на 1 и полученное число разделить на 2, то это и будет знаменатель первой аликвотной дроби. А знаменатель второй аликвотной дроби будет определяться как произведение знаменателей самой дроби и первой аликвотной дроби. По этой закономерности мы можем составить формулу. Она будет выглядеть так

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{(n+1):2}+\frac{1}{n(n+1):2}$$

Проверим её.

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{(11+1):2}+\frac{1}{11\cdot(11+1):2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{(13+1):2}+\frac{1}{13\cdot(13+1):2}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{(15+1):2}+\frac{1}{15\cdot(15+1):2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

Разложение дробей вида 3/n.

Теперь рассмотрим примеры с дробью, числитель у которой 3.

Попробуем разложить например, дробь $\frac{3}{11}$

$\frac{3}{11}=\frac{1}{4}+\frac{1}{44}$

По примеру разложения дроби вида 2/n, видно, что рассмотренная ранее формула не подходит. Значит у дробей с числителем 3 другая формула.

Если посмотреть на саму дробь и первую аликвотную дробь $\frac{3}{11}=\frac{1}{4}$ мы можем увидеть, что, если умножить дроби крест-накрест (3 * 4 – 11 * 1), разница между ними будет 1. Это значит, что мы можем, найти дроби, подобрав число.

Но мы столкнулись с проблемой. У некоторых дробей их разница равняется 2. Для примера возьмём дробь $\frac{3}{13}$.

С этой дробью подобрать число так, чтобы разница была 1, не получится. Разница между ними равняется 2. Как мы уже ранее рассказали, мы знаем, что можем и умеем разлагать дробь с числителем 2, а разница между ними, это как раз и есть числитель второй дроби. То есть, это значит, что некоторые дроби будут разлагаться на три египетских дроби.

Попробуем это сделать.

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{5}+\frac{2}{65}=\frac{1}{5}+\frac{1}{33}+\frac{1}{2145}$$

Как мы видим, у нас получилось разложить дробь на 3 аликвотных дроби. Из этого сделаем вывод, что некоторые дроби разлагаются на 2 египетских дроби или же на 3. Это стало возможным, когда разность между произведением числителя дроби и знаменателя первой аликвотной дроби и знаменателем дроби равна двум. То есть вторая дробь в сумме будет с числителем 2, которую мы уже можем разложить.

И так же здесь закономерность, по которой составили формулу.

$$\boxed{\frac{3}{n}=\frac{1}{x}\to\frac{3x-1n}{nx}=\frac{2}{nx}+\frac{1}{x}=\frac{1}{(nx+1):2}+\frac{1}{nx(nx+1):2}+\frac{1}{x}}$$

Проверим формулу на примере с дробью

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{9-7}{7\cdot3}=\frac{2}{21}+\frac{1}{3}=\frac{1}{(21+1):2}+\frac{1}{21\cdot(21+1):2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{19}=\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{21-19}{19\cdot7}=\frac{2}{133}+\frac{1}{7}=\frac{1}{(133+1):2}+\frac{1}{133\cdot(133+1):2}+\frac{1}{7}=\frac{1}{72}+\frac{7}{9576}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{25}=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{27-25}{25\cdot9}=\frac{2}{225}+\frac{1}{9}=\frac{1}{(225+1):2}+\frac{1}{225\cdot(225+1):2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{113}+\frac{1}{22538}+\frac{1}{9}$$

Но эта формула так же имеет погрешности. Есть случаи, когда дробь 2/nx оказывается сократимой. В таком случае мы сокращаем её.

$$\frac{3}{16}=\frac{1}{6}+\frac{2}{96}=\frac{1}{6}+\frac{1}{48}$$

Это получается, когда знаменатель четное число.

Но появился вопрос. Откуда берётся знаменатель, то есть х. Чтобы найти х, посмотрим на примеры. Как мы видим, умножив числа крест-накрест их разница равняется двум. Но как же это влияет на х? Как мы выяснили, число х мы можем найти, прибавив к знаменателю, то есть к n остатки от деления числителя, чтобы оно было кратно ему. Возьмем дробь с числителем 3. Остатки от деления на 3 – это 1 и 2. То есть, к n мы прибавляем остаток от деления и смотрим, кратно оно ему, или нет. Для примера взяли дробь. $\frac{3}{25}$ Прибавляем к числителю 1. 26 не кратно 3.

Прибавляем 2, 27 кратно трем. Делим 27 на 3 и как мы видим, мы нашли знаменатель, то есть х.

Выводы

В работе были рассмотрены дроби вида 2/n и 3/n. Исследования показали, что можно быстро и удобно разложить дроби первого вида по формуле

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{(n+1):2}+\frac{1}{n(n+1):2}$$

Дроби второго вида по формуле

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{x}\to\frac{3x-1n}{nx}=\frac{2}{nx}+\frac{1}{x}=\frac{1}{(nx+1):2}+\frac{1}{nx(nx+1):2}+\frac{1}{x}$$

если разность 3x – 1n = 2,

и по формуле

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{3x-1n}{nx}+\frac{1}{x}=\frac{1}{nx}+\frac{1}{x}$$

, если разность 3x – 1n = 1

Литература

1. Журнал «Квант», №12, 2019 г.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Египетские_дроби
3. https://skysmart.ru/articles/mathematic/obyknovennye-drobi#:
4. https://www.yaklass.ru/p/matematika/5-klass/obyknovennye-drobi-13744/
5. http://www.mathnet.ru/links/6a7e5287b75e64ad80093a059257b1e7/kvant528.pdf
6. https://izilearn.ru/index.php?r=acmp%2Fview&id=15\
7. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/436051/Egipetskie_drobi